Déterminer les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes

- 1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
- 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{3 - x}$
- 3) $f(x) = \sqrt{x - 1} - \sqrt{x}$
- 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$
- 5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x - 4}}$
- 6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2}$
- 7) $f(x) = x + \sqrt{x + 5}$
- 8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$
- 9) $f(x) = \dfrac{x\,|x - 1|}{x^2 - 1}$
- 10) $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{2x + 1}$

Solutions

1. Dom f = $\longleftarrow, 1] \cup [2, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$$

AO $\equiv y = x - \dfrac{3}{2}$ à droite

AO $\equiv y = \dfrac{3}{2} - x$ à gauche

2. Dom f = $\longleftarrow, -1] \cup [1, 3[\cup]3, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{3 - x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{3 - x} = 0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = -\infty \end{cases}$$

AV $\equiv x = 3$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = 1$$

AH $\equiv y = -1$ à droite

AH $\equiv y = 1$ à gauche

3. Dom f = $[1, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ n'existe pas

AH $\equiv y = 0$ à droite

4. Dom f = $]-2, 2[$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

AV $\equiv x = -2$ a droite

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

AV $\equiv x = 2$ a gauche

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ n'existe pas

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ n'existe pas

5. Dom f = $\longleftarrow, 3] \cup]4, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x-4}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \sqrt{\frac{x-3}{x-4}} = +\infty$$

AV $\equiv x = 4$ a droite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-3}{x-4}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-3}{x-4}}=1$$

AH $\equiv y = 1$

6. Dom f $= [-7, 2[\cup]2, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to-7}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\quad \text{n'existe pas}$$

AH $\equiv y = 0$ à droite

7. Dom f $= [-5, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to-5} x+\sqrt{x+5}=-5$$

$$\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x+5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x+5}\quad \text{n'existe pas}$$

8. Dom f $= \mathbb{R}$

pas d'asymptote verticale

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$$

AH $\equiv y = 0$ à droite

9. Dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=+\infty\end{cases}$$

AV $\equiv x = -1$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=-\frac{1}{2}\\[2ex]\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x|x-1|}{x^2-1}=-1$$

AH $\equiv y = 1$ à droite

AH $\equiv y = -1$ à gauche

10. Dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ <}} \frac{\left|x^2-x-2\right|}{2\,x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ >}} \frac{\left|x^2-x-2\right|}{2\,x+1} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{AV} \equiv x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left|x^2 - x - 2\right|}{2\,x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left|x^2 - x - 2\right|}{2\,x + 1} = -\infty$$

$$\text{AO} \equiv y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$