■ Déterminer les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$
2. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
4. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x - 6}$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{3x^2 - 1}}{1 - 2x}$
6. $f(x) = \dfrac{1 - 5x}{\sqrt{3x^2 - x + 1}}$
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{2x^2 - 1}}{1 - 3x}$
8. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{\sqrt{x^2 - 4} - 1}$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$
10. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2\sqrt{x^2 - 4x}$
11. $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{3x - \sqrt{9x^2 + 3x}}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4x^3 - 4}}$
13. $f(x) = \sqrt{4x - 1} - \sqrt{4x^2 - 4}$
14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{4x - 1}$

■ Solutions

1. Dom f = $\longleftarrow, 0] \cup [4, \longrightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 4x} = 0$$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2 - 4x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$$

AO $\equiv y = x - 2$ à droite

AO $\equiv y = 2 - x$ à gauche

2. Dom f = $]\frac{1}{2}, \longrightarrow$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} 3 + \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} = +\infty$$

$\text{AV} \equiv x = \frac{1}{2}$ a droite

$\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 3$

$\lim_{x\to-\infty} 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ n'existe pas

$\text{AH} \equiv y = 3$ à droite

3. Dom f = $\mathbb{R}$

pas d'asymptote verticale

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3} = +\infty$

$\text{AO} \equiv y = x + 1$ à droite

$\text{AO} \equiv y = -x - 1$ à gauche

4. Dom f = $\longleftarrow, -2] \cup [3, \longrightarrow$

$\lim_{x\to-2} x + \sqrt{x^2-x-6} = -2$

$\lim_{x\to3} x + \sqrt{x^2-x-6} = 3$

$\lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2-x-6} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2-x-6} = \frac{1}{2}$

$\text{AH} \equiv y = \frac{1}{2}$ à gauche

5. Dom f = $\longleftarrow, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, \longrightarrow$

$\lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3x^2-1}}{1-2x} = \frac{\sqrt{15}}{3+2\sqrt{3}}$

$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3x^2-1}}{1-2x} = \frac{\sqrt{15}}{3-2\sqrt{3}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3x^2-1}}{1-2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3x^2-1}}{1-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{AH} \equiv y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ à droite

$\text{AH} \equiv y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ à gauche

6. Dom f = $\mathbb{R}$

pas d'asymptote verticale

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-5x}{\sqrt{3x^2-x+1}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-5x}{\sqrt{3x^2-x+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$\text{AH} \equiv y = -\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ à droite

$\text{AH} \equiv y = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ à gauche

7. Dom f = [1, ⟶

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3-1} - \sqrt{2x^2-1}}{1-3x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3-1} - \sqrt{2x^2-1}}{1-3x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^3-1} - \sqrt{2x^2-1}}{1-3x} \quad \text{n'existe pas}$$

8. Dom f = $\longleftarrow, -\sqrt{5}\,[\,\cup\,]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}\,[\,\cup\,]\sqrt{5}, \longrightarrow$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to-\sqrt{5} \\ <}} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-\sqrt{5} \\ >}} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = -\infty \end{cases}$$

$\text{AV} \equiv x = -\sqrt{5}$

$$\lim_{x\to-2} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = -13$$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to\sqrt{5} \\ <}} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to\sqrt{5} \\ >}} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = +\infty \end{cases}$$

$\text{AV} \equiv x = \sqrt{5}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4}-1} = -3$$

$\text{AH} \equiv y = 3$ à droite

$\text{AH} \equiv y = -3$ à gauche

9. Dom f = $\mathbb{R}$

pas d'asymptote verticale

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4} = 0$$

$\text{AH} \equiv y = 0$

10. Dom f = ⟵, 0] ∪ [4, ⟶

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2-4x} = 1$$

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{65}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2-4x} = 4$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2-4x} = -4$$

AH $\equiv y = 4$ à droite

AH $\equiv y = -4$ à gauche

11. Dom f = $\longleftarrow, -\frac{1}{3}] \cup]0, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{x - \sqrt{x^2+2x+4}}{3x - \sqrt{9x^2+3x}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x - \sqrt{x^2+2x+4}}{3x - \sqrt{9x^2+3x}} = +\infty$$

AV $\equiv x = 0$ a droite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+2x+4}}{3x - \sqrt{9x^2+3x}} = 2$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+2x+4}}{3x - \sqrt{9x^2+3x}} = \frac{1}{3}$$

AH $\equiv y = 2$ à droite

AH $\equiv y = \frac{1}{3}$ à gauche

12. Dom f = $]1, \longrightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^3-4}} = +\infty$$

AV $\equiv x = 1$ a droite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^3-4}} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^3-4}} \quad \text{n'existe pas}$$

AH $\equiv y = 0$ à droite

13. Dom f = $[1, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{4x-1} - \sqrt{4x^2-4} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x-1} - \sqrt{4x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{4x-1} - \sqrt{4x^2-4} \quad \text{n'existe pas}$$

14. Dom f = $\longleftarrow, \frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4}, 1] \cup [2, \longrightarrow$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ <}} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ >}} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{AV} \equiv x = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4x-1} = -\frac{1}{4}$$

$\text{AH} \equiv y = \frac{1}{4}$ à droite

$\text{AH} \equiv y = -\frac{1}{4}$ à gauche