Préparation 1

- Sam doit suivre un régime pendant une année.

Le premier jour, il ne mange pas de chocolat.

Si un jour donné n ($1 \leq n \leq 365$) Sam ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur cinq qu'il n'en mange pas le lendemain.

Si ce même jour, Sam mange du chocolat, il y a une chance sur deux qu'il n'en mange pas le lendemain.

Pour $n \geq 1$ on désigne par F_n l'événement "Sam ne mange pas de chocolat le jour n ".

a) Calculer $P(F_2 | F_1)$ et $P(F_2^C | F_1)$

b) Calculer la probabilité des événements:

A : Sam ne mange pas de chocolat durant les n premiers jours

B : Sam mange du chocolat seulement le dernier jour des n premiers jours.

c) Durant les 3 premiers jours, on note X le nombre de jours pendant lesquels Sam mange du chocolat.

Calculer la loi de probabilités.

Calculer l'espérance de X.

a) Le premier jour il n'en a pas mangé, donc 1 chance sur 5 qu'il n'en mange pas le 2ème : $P(F_2 | F_1) = \frac{1}{5}$

Par complémentarité, $P(F_2^C | F_1) = \frac{4}{5}$

b) $P(A) = 1 \times \frac{1}{5} \frac{1}{5} \dots \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

B : il n'a pas mangé de chocolat pendant les $n - 1$ premiers jours ($P = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$), mais il en mange le dernier jour ($P = \frac{4}{5}$ puisqu'il n'en a pas mangé la veille)

$$P(B) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

La formule fonctionne aussi pour $n=2$ qui était un cas particulier

c)

$X = 0$ équivaut à $P(A)$ avec $n = 3$ soit $1/25$

$X = 1$

il mange du chocolat une seule fois, ça ne peut être que le deuxième ou le 3ème jour

$$P = \frac{4}{5} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{4}{5} = \frac{14}{25}$$

$X=2$ même raisonnement, seul cas possible ce sont les 2ème et 3ème jours

$$P = \frac{4}{5} \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

$X = 3$ cas impossible puisqu'il n'en a pas mangé le premier jour

La loi des probabilités est donc :

x_i	p_i	$x_i p_i$
-------	-------	-----------

0	$\frac{1}{25}$	0
---	----------------	---

1	$\frac{14}{25}$	$\frac{14}{25}$
---	-----------------	-----------------

2	$\frac{10}{25}$	$\frac{20}{25}$
---	-----------------	-----------------

$\Sigma =$	1	$\frac{34}{25}$
------------	---	-----------------

et $EX = \frac{34}{25} = 1.36$